19/04/2024

IIS Benedetti Tommaseo

Liceo scientifico ordinamentale e opzione scienze applicate

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n.9305 del 20 marzo 2023).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano/lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Nome e sezione: ______________________________

Problemi

1. Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \frac{kx}{e^{kx}}\ , \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

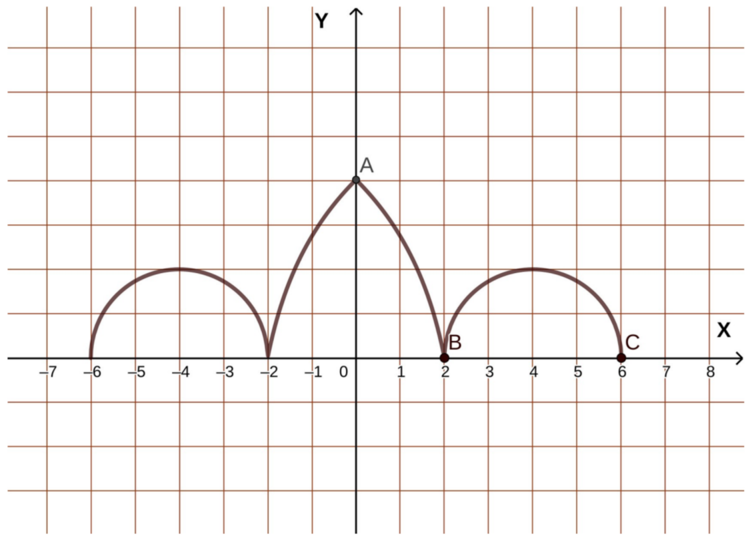
   (a) Determina il dominio. Dimostra che, al variare di k, la funzione ammette un solo punto stazionario e classificalo. Dimostra che tutte le funzioni hanno un asintoto orizzontale in comune.

   (b) Dimostra che, al variare di k, tutte le funzioni hanno un unico flesso di ordinata comune $2/e^2$. Determina per quale valore di k, il flesso è nel punto di ascissa $x = 1$.

   (c) Studia la funzione $f_2(x)$ tracciando il grafico probabile, mettendo in evidenza eventuali asintoti, massimi, minimi e flessi.

   (d) Determina l'area del triangolo limitato dalle seguenti rette: la normale alla funzione nel suo unico zero, le due rette, rispettivamente tangente e normale, alla curva nel punto di massimo.

2. Il profilo di una decorazione in una chiesa neogotica segue la curva definita a tratti in figura. Si tratta di due semicirconferenze e di due tratti di funzioni logaritmiche. Il profilo presenta una simmetria rispetto all'asse delle ordinate.



(a) Ricava l'espressione della funzione che descrive il profilo, utilizzando
   - funzioni logaritmiche del tipo $f(x) = a\ln(5 + bx)$
   - l'equazione della circonferenza $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ dove R è il raggio e $(x_0; y_0)$ sono le coordinate del centro
   - le coordinate dei punti $A\left(0, \dfrac{5}{2}\ln 5\right)$ $\quad B(2; 0)$ $\quad C(6; 0)$

(b) Studia i punti di non derivabilità della funzione

(c) Calcola in gradi l'angolo tra le tangenti alla curva condotte per il punto A e poi calcola l'angolo tra le tangenti condotta dal punto B (approssima quest'ultimo valore all'unità)

(d) Dai punti del grafico, di ascissa 5 e -5, si conducano due tangenti al grafico, che intersecano l'asse delle ascisse nei punti E e F, e l'asse delle ordinate nel punto P. Trova l'area del triangolo PEF, che sarà realizzato in marmo di Carrara.

(e) Si installa un faretto nel punto di coordinate $L(7; 9)$. Il faretto viene considerato piano e di dimensioni trascurabili. Quando la sera viene accesso, qual è il primo punto del tratto BC sulla curva che viene raggiunto dalla luce? Trova le coordinate di questo punto in due modi diversi

Quesiti

1. Un'azienda deve produrre una pentola cilindrica di capacità V. Quali devono essere le dimensioni della pentola affinché venga utilizzata la quantità minima di materiale?

2. Discuti il seguente limite al variare di p:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{p} \right)^{\frac{1}{x}} , \quad p > 0$$

   Oppure in alternativa:

   Trova il valore di k tale per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - k\cos x - x}{x^2} = 3$$

3. Sia $f(x) = 3 - e^{-k(x-5)}$ una funzione parametrica con parametro $k > 0$. Dal suo punto A di intersezione con l'asse delle x, si mandi la tangente r al grafico della funzione. La retta r interseca la retta $s : y = 3$ in un punto B. Chiamiamo C la proiezione di B sull'asse delle ascisse. Sapendo che l'area del triangolo ABC è pari a 3, si determini il valore di k.

4. In una giornata di tempo variabile, si misura la temperatura del cruscotto della macchina dalle ore $15:00$ alle ore $15:50$, ogni minuto. Si vede che se si pone $t = 0$ alle ore $15:00$, l'andamento della temperatura in questo intervallo di tempo si può approssimare con la funzione

$$T(t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{t}{10} - 1\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{10} - 1\right)^2 + 20$$

   dove la temperatura è misurata in gradi centrigradi e il tempo in minuti.
   Trova, in questo intervallo, a che ora si è registrata la massima crescita della temperatura, esprimendo il risultato in ore e minuti.

5. Nel gioco del bingo, per la prima chiamata dei numeri, vengono estratti contemporaneamente tre numeri dall'urna. Determina la probabilità che:
   (a) Tra i numeri estratti non ci sia alcun multipli di 10
   (b) Tra i numeri estratti ci sia almeno un multiplo di 10
   (c) Tutti i numeri estratti siano multipli di 10

6. Studia la continuità e la derivabilità della seguente funzione. Classifica gli eventuali punti trovati.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x^2+1} & x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

   Oppure

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & -2 < x \leq 0 \\ \dfrac{x+2}{x-2} & x > 0 \ \wedge \ x \neq 0 \end{cases}$$

7. Trova per quali valori a e b la funzione $f(x)$ è continua e derivabile. Determina poi se esiste un intervallo nel quale vale il teorema di Rolle.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-a)^2 & x < 1 \\ \ln x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

8. Considera un triangolo isoscele ABC, di base AB. Traccia le bisettrici dei due angoli esterni, di vertici A e B, che appartengono al semipiano generato da AB, che non contiene C. Siano O il punto di intersezione di tali bisettrici, N il punto di intersezione delle rette CA e BO, M il punto di intersezione delle rette CB e AO. Dimostra che OM e ON sono congruenti.

9. Verifica qual è la posizione della retta r, di equazione

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

rispetto al piano $\pi : 4x + 5y + z - 1 = 0$.

10. Dimostrare che, nell'intervallo $(-\pi/2\ ;\ \pi/2)$, l'equazione

$$\tan x + 4x - 2 = 0$$

ammette un'unica soluzione.